Ekonometria

Programowanie Liniowe

Robert Pietrzykowski

ZADANIE: Przedsiębiorstwo produkuje dwa wyroby: W1 i W2. Ograniczeniem w procesie produkcji jest czas pracy trzech maszyn: M1, M2 i M3. W tablicy 1 podano zużycie czasu pracy każdej z tych maszyn na produkcję jednostki poszczególnych wyrobów, dopuszczalne czasy pracy maszyn oraz ceny wyrobów.

MASZYNY	**Zużycie czasu pracy maszyny (w godz.) ma jednostkę wyrobu**		**Dopuszczalny czas pracy maszyny**
	W1	W2	
M1	2	1	1000
M2	3	3	2400
M3	1,5	_	600
Ceny (w zł)	30	20	

1) Należy określić w jakich ilościach produkować poszczególne wyroby, aby przy istniejących ograniczeniach przychód z ich sprzedaży był możliwie największy.
2) Czy optymalna struktura produkcji ulegnie zmianie, jeżeli cena wyrobu W1 wzrośnie do 40 zł.

OPTYMALIZACJA: Zagadnienie programowania liniowego.

CECHY:

x1 – wielkość produkcji wyrobu W1
x2 – wielkość produkcji wyrobu W2

WARUNKI OGRANICZAJĄCE:

$$2x_1 + 1x_2 \leq 1000$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 2400$$

$$1.5x_1 \leq 600$$

FUNKCJA CELU:

$$30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$$

MASZYNY	Zużycie czasu pracy maszyny (w godz.) ma jednostkę wyrobu		Dopuszczalny czas pracy maszyny
	W1	W2	
M1	**2**	**1**	**1000**
M2	**3**	**3**	**2400**
M3	**1,5**	**-**	**600**
Ceny (w zł)	**30**	**20**	

$$F(x_1; x_2) = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$$

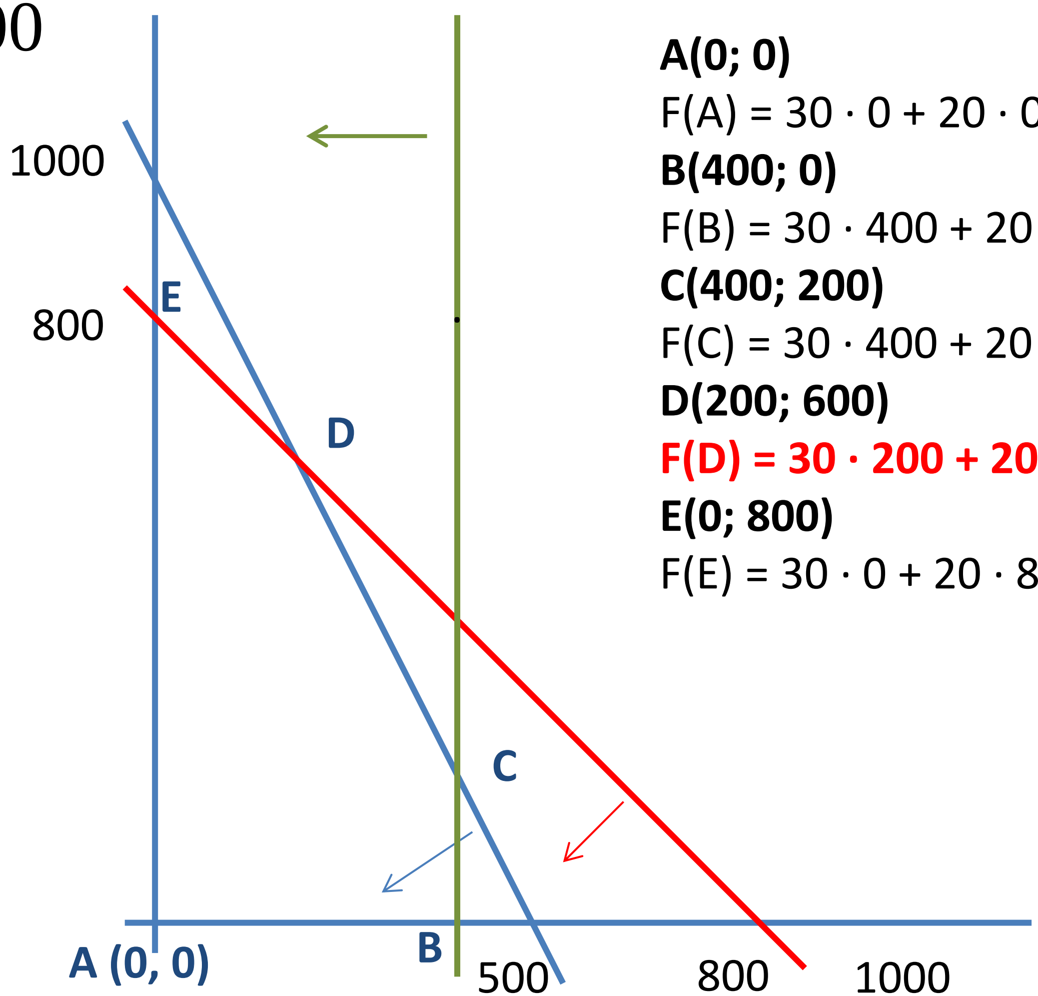
$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \leq 1000 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 2400 \\ 1.5x_1 + 0x_2 \leq 600 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Metoda geometryczna

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \le 1000 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 2400 \\ 1.5x_1 + 0x_2 \le 600 \\ x_1; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

X1	X2
0	1000
500	0

A (0, 0)
B (400, 0)
C (400, 200)
D (200, 600)
E (800, 0)

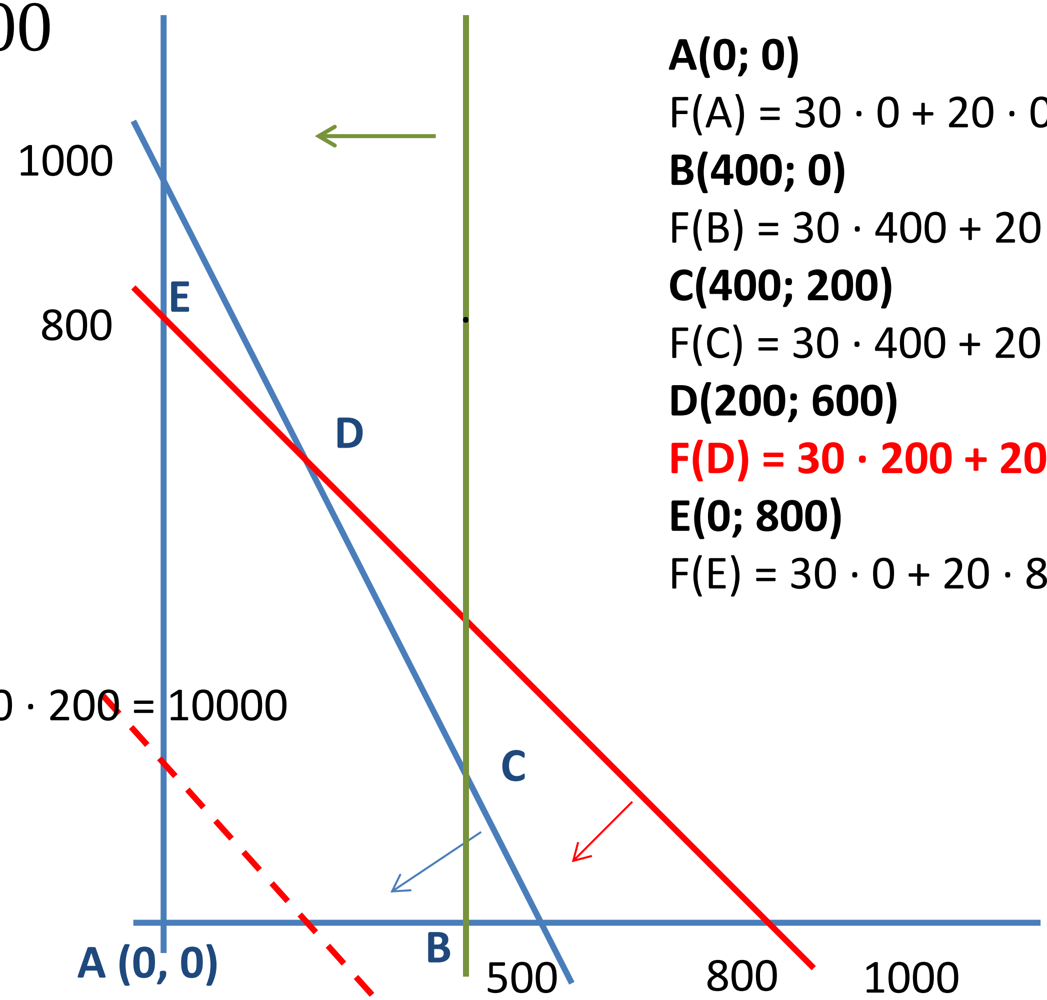


A(0; 0)
F(A) = 30 · 0 + 20 · 0 = 0,
B(400; 0)
F(B) = 30 · 400 + 20 · 0 = 12000,
C(400; 200)
F(C) = 30 · 400 + 20 · 200 = 16000,
D(200; 600)
F(D) = 30 · 200 + 20 · 600 = 18000,
E(0; 800)
F(E) = 30 · 0 + 20 · 800 = 16000

Metoda geometryczna

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \le 1000 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 2400 \\ 1.5x_1 + 0x_2 \le 600 \\ x_1; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Zatem należy produkować 200 sztuk wyrobu W1 i 600 sztuk wyroby W2, co da przychód ze sprzedaży (maksymalny przy istniejących ograniczeniach) w wysokości 18000 zł.



A (0, 0)
B (400, 0)
C (400, 200)
D (200, 600)
E (800, 0)

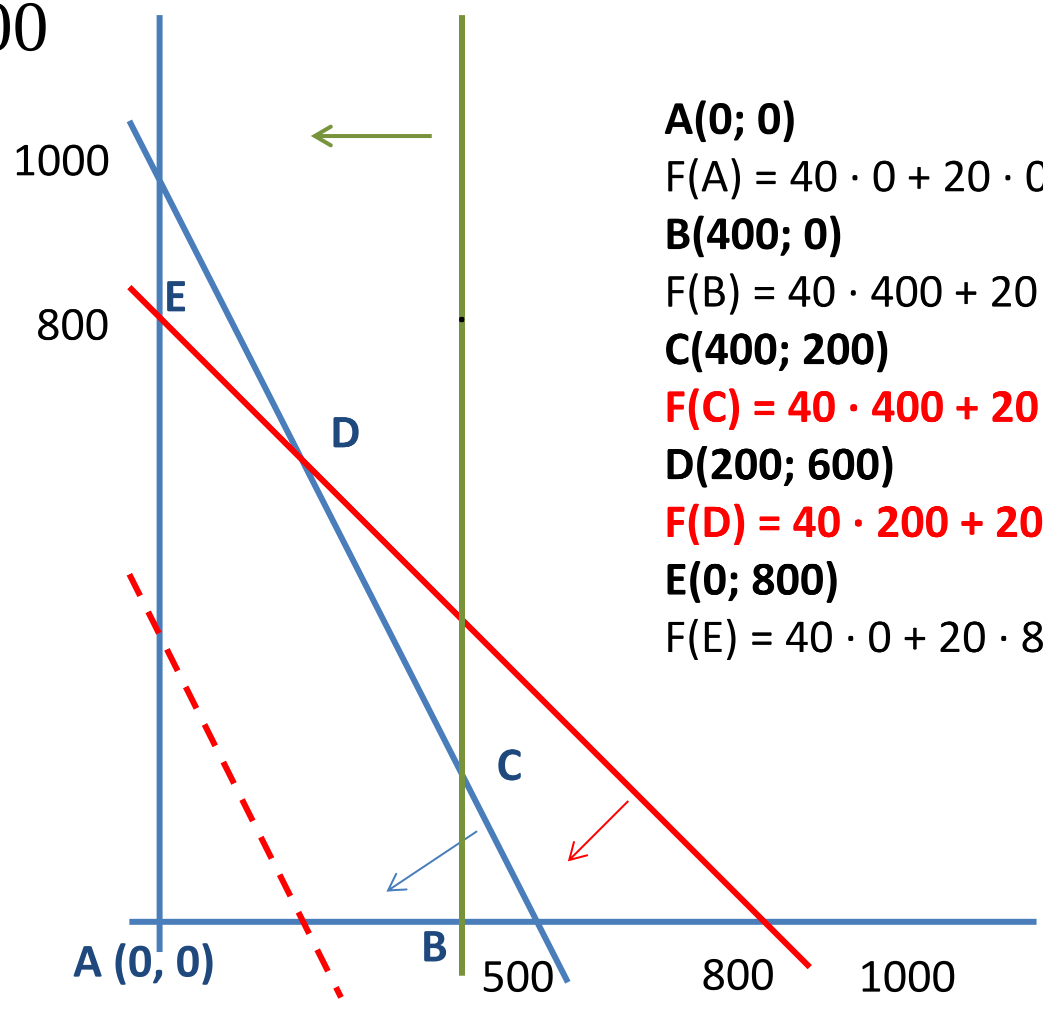
F(x1,x2)= 30 · 200 + 20 · 200 = 10000

A(0; 0)
F(A) = 30 · 0 + 20 · 0 = 0,
B(400; 0)
F(B) = 30 · 400 + 20 · 0 = 12000,
C(400; 200)
F(C) = 30 · 400 + 20 · 200 = 16000,
D(200; 600)
F(D) = 30 · 200 + 20 · 600 = 18000,
E(0; 800)
F(E) = 30 · 0 + 20 · 800 = 16000

Metoda geometryczna

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \leq 1000 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 2400 \\ 1.5x_1 + 0x_2 \leq 600 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Cały odcinek CD będzie obecnie zbiorem rozwiązań dopuszczalnych. Wartość funkcji celu w obu punktach jest taka sama, a zatem funkcja celu przyjmie taką sama wartość w dowolnym innym punkcie odcinka CD



A(0; 0)
F(A) = 40 · 0 + 20 · 0 = 0,
B(400; 0)
F(B) = 40 · 400 + 20 · 0 = 16000,
C(400; 200)
F(C) = 40 · 400 + 20 · 200 = 20000,
D(200; 600)
F(D) = 40 · 200 + 20 · 600 = 20000,
E(0; 800)
F(E) = 40 · 0 + 20 · 800 = 8000

PL in R

$$F(x_1;x_2)=30x_1+20x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1+1x_2 \le 1000 \\ 3x_1+3x_2 \le 2400 \\ 1.5x_1+0x_2 \le 600 \\ x_1;x_2 \ge 0 \end{cases}$$

```
>library(boot)

>f.celu=c(30,20)
>f.o1=c(2,1)
>f.o2=c(3,3)
>f.o3=c(1.5,0)
>f.o4=c(1,1)

>rozw=simplex(a=f.celu,A1=rbind(f.o1,f.o2,f.o3), b1=c(1000,2400,600),maxi=TRUE)
>rozw
```

Linear Programming Results

Call : simplex(a = f.celu, A1 = rbind(f.o1, f.o2, f.o3), b1 = c(1000, 2400, 600), maxi = TRUE)

Maximization Problem with Objective Function
Coefficients x1 x2 30 20

Optimal solution has the following values x1 x2 200 600 The optimal value of the objective function is 18000.

Farmer musi ekstra wzbogacić dietę hodowlanych zwierząt o dwa składniki odżywcze (A i B), zwykle obecne, ale w rożnych ilościach, w większości gotowych mieszanek paszowych. W ciągu miesiąca zwierzęta powinny otrzymać co najmniej 90 jednostek składnika A i dokładnie 150 jednostek składnika B. Dostępne w sprzedaży mieszanki: M1 i M2 zawierają te składniki, ale jest w nich obecna także pewna ilości składnika C, którego zwierzęta nie powinny otrzymać więcej niż 96 jednostek. W tabeli podano zawartość składników odżywczych w mieszankach i ceny ich zakupu:

Mieszanka	Zawartość składnika w 1 kg mieszanki			Cena 1 kg mieszanki (zł)
	A	B	C	
M_1	6	15	24	4,5
M_2	15	10	4	3

Wiedząc ponadto, że mieszanki M1 nie należy podawać więcej niż M2 i nie więcej niż 4 kg w ciągu miesiąca należy odpowiedzieć na następujące pytania:

a) w jakiej ilości zakupić mieszanki M1 i M2, aby zwierzęta otrzymały potrzebne składniki odżywcze przy możliwie najniższych kosztach zakupu mieszanek.

b) czy optymalna dieta ulegnie zmianie, jeżeli mieszanka M2 podrożeje do 4 zł.

Mieszanka	Zawartość składnika w 1 kg mieszanki			Cena 1 kg mieszanki (zł)
	A	B	C	
M_1	6	15	24	4,5
M_2	15	10	4	3

$$F(x_1, x_2) = 4{,}5x_1 + 3x_2 \to \min$$

1) $6x_1 + 15x_2 \geq 90$

2) $15x_1 + 10x_2 = 150$

3) $24x_1 + 4x_2 \leq 96$

4) $x_1 \leq x_2$

5) $x_1 \leq 4$

6) $x_1, x_2 \geq 0$

Odlewnia powinna wyprodukować w ramach zamówienia 1600 ton żeliwa zawierającego 62,5% Si i 18,75% Mn. W celu realizacji zamówienia odlewnia może kupić czterech rodzajów stopów żeliwnych, ale o innej proporcji wyżej wymienionych pierwiastków. Zawartości pierwiastków i ceny zakupu stopów, podanych w tabelce.

Stop	% zawartość pierwiastka w stopie		Cena 1 tony stopu (zł)
	Si	Mn	
S_1	30	30	45
S_2	60	40	54
S_3	70	-	42
S_4	80	20	36

a) Ile należy zakupić poszczególnych stopów, aby wyprodukować żeliwo o pożądanym składzie ponosząc możliwie najniższe koszty zakupu stopów.
b) Jak wzrosną koszty zakupu stopów, jeżeli wymagania dotyczące zawartości Si w żeliwie wzrosną o 10 ton.

Zagadnienie PL: diety i mieszanki

Stop	% zawartość pierwiastka w stopie		Cena 1 tony stopu (zł)
	Si	Mn	
S_1	30	30	45
S_2	60	40	54
S_3	70	-	42
S_4	80	20	36

$$F(x_1,\dots,x_4) = 45x_1 + 54x_2 + 42x_3 + 36x_4 \;\to\; \min$$

$$0{,}3x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}7x_3 + 0{,}8x_4 \geq 1000$$

$$0{,}3x_1 + 0{,}4x_2 \qquad\quad + 0{,}2x_4 \geq 300$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Zagadnienie PL: proces technologiczny

Klient dostarczył do tartaku kłody o długości 4,4 m, zlecając pocięcie ich tak, aby otrzymać 400 kompletów belek. Na 1 komplet składają się: 1 belka o długości 0,8 m i 3 belki o długości 1,1 m. Należy podać optymalny sposób rozkroju surowca, aby zrealizować zamówienie minimalizując koszt odpadów, jeżeli wiadomo, że 1 m odpadów kosztuje 20 zł.

Belki o długości	Sposoby rozkroju 1 kłody					Zamówiona ilość
	I	II	III	IV	V	
0,8 m	5	4	2	1	0	400
1,1 m	0	1	2	3	4	1200
Odpad (m)	0,4	0,1	0,6	0,3	0	
Odpad (zł)	8	2	12	6	0	

$$F(x_1,\dots,x_5) = 8x_1 + 2x_2 + 12x_3 + 6x_4 + 0x_5 \to \min$$

$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 400$$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 \geq 1200$$

$$x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0$$

Zagadnienie PL: transportowe.

Trzy magazyny zaopatrują w cukier cztery zakłady cukiernicze. Magazyny posiadają odpowiednio: 70, 50 i 80 ton cukru natomiast zapotrzebowanie poszczególnych zakładów cukierniczych wynosi: 40, 60, 50 i 50 ton. Koszty transportu 1 tony cukru z magazynów do zakładów cukierniczych (w zł) podano w tablicy

Dostawcy \ Odbiorcy	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
M_1	125	100	125	50
M_2	100	200	175	75
M_3	150	100	175	200

Należy opracować plan przewozu cukru z magazynów do zakładów cukierniczych tak, aby łączne koszty transportu były możliwie najniższe.

Dostawcy \ Odbiorcy	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	A_i
M_1	125	100	125	50	70
M_2	100	200	175	75	50
M_3	150	100	175	200	80
B_j	40	60	50	50	

$$K(x_{ij}) = 125x_{11} + 100x_{12} + 125x_{13} + 50x_{14} + \\ + 100x_{21} + 200x_{22} + 175x_{23} + 75x_{24} + \\ + 150x_{31} + 100x_{32} + 175x_{33} + 200x_{34} \rightarrow \min$$

funkcja celu minimalizująca łączne koszty transportu od wszystkich dostawców do wszystkich odbiorców.

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= \sum_{j=1}^{4} x_{1j} = 70 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= \sum_{j=1}^{4} x_{2j} = 50 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= \sum_{j=1}^{4} x_{3j} = 80 \end{aligned}\right\}$$

warunki dla dostawców

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= \sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 40 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 60 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 50 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= \sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 50 \end{aligned}\right\}$$

warunki dla odbiorców

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3; \quad j = 1, \ldots, 4)$$

warunki brzegowe