

EKONOMETRIA

Robert Pietrzykowski

Wykład X

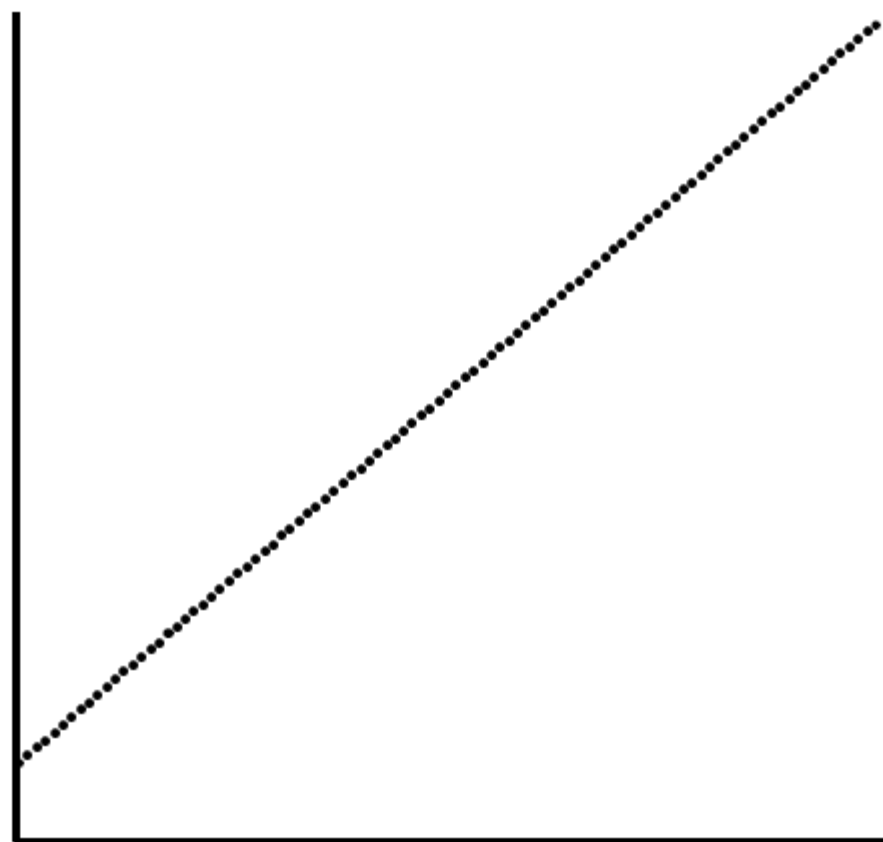
Modele linearyzowalne

Czynniki deterministyczne

$$m = 1 \quad p = 1$$

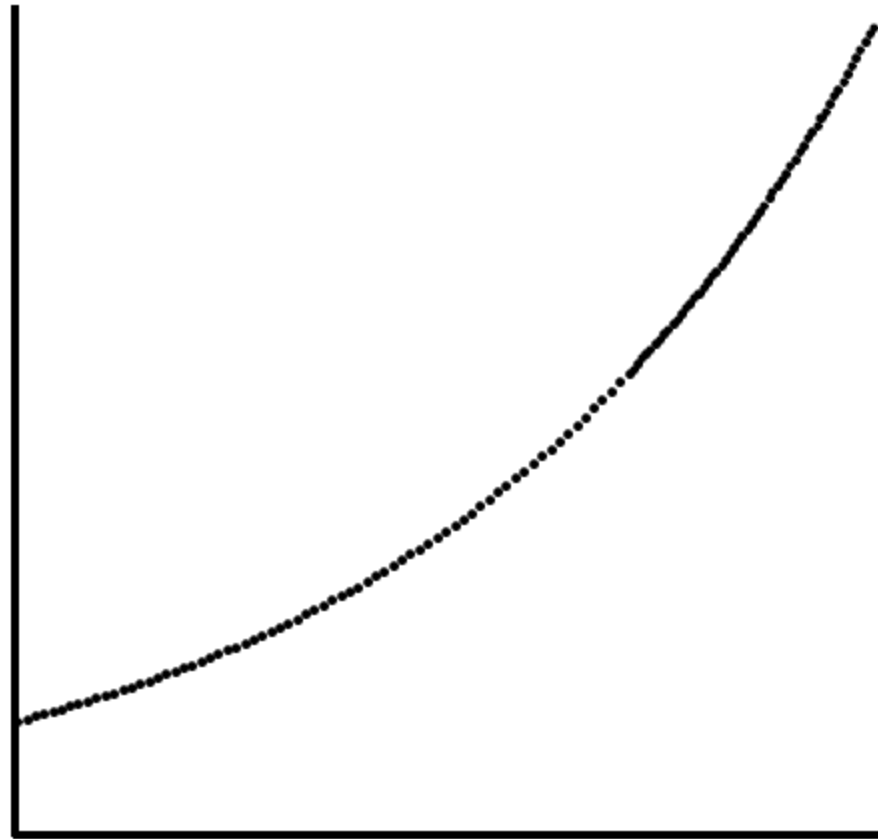
1. Propozycja funkcji regresji f .
2. Dopasowanie zaproponowanej funkcji.
3. Ocena jakości dopasowania.
4. Wnioski.

$$a + bx$$



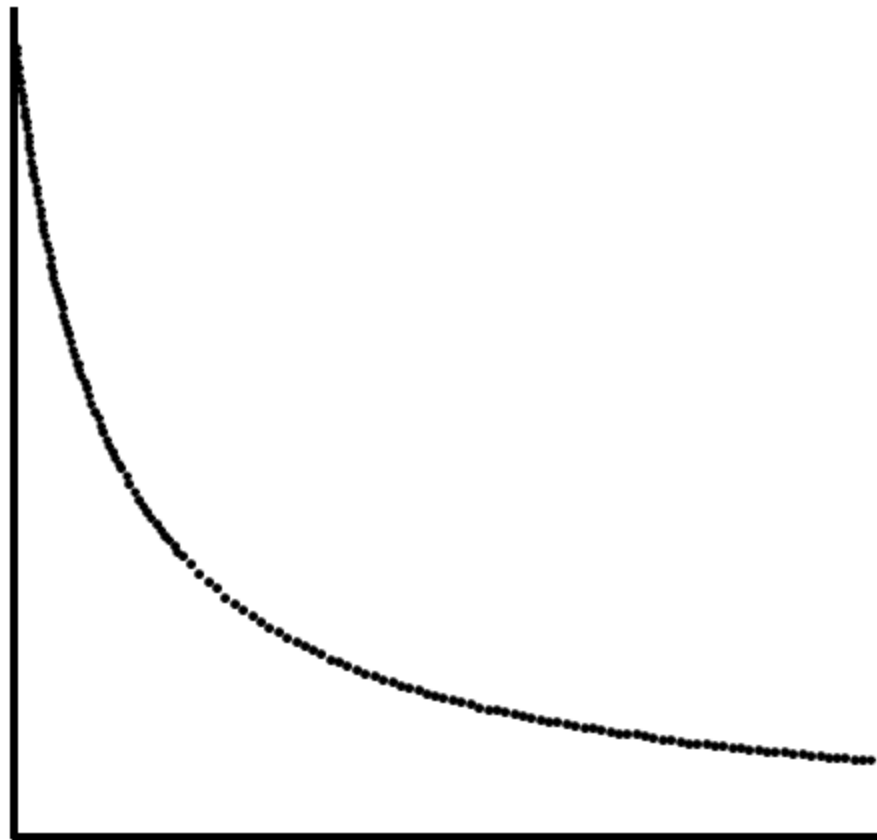
regresja liniowa

$$e^{a+bx}$$



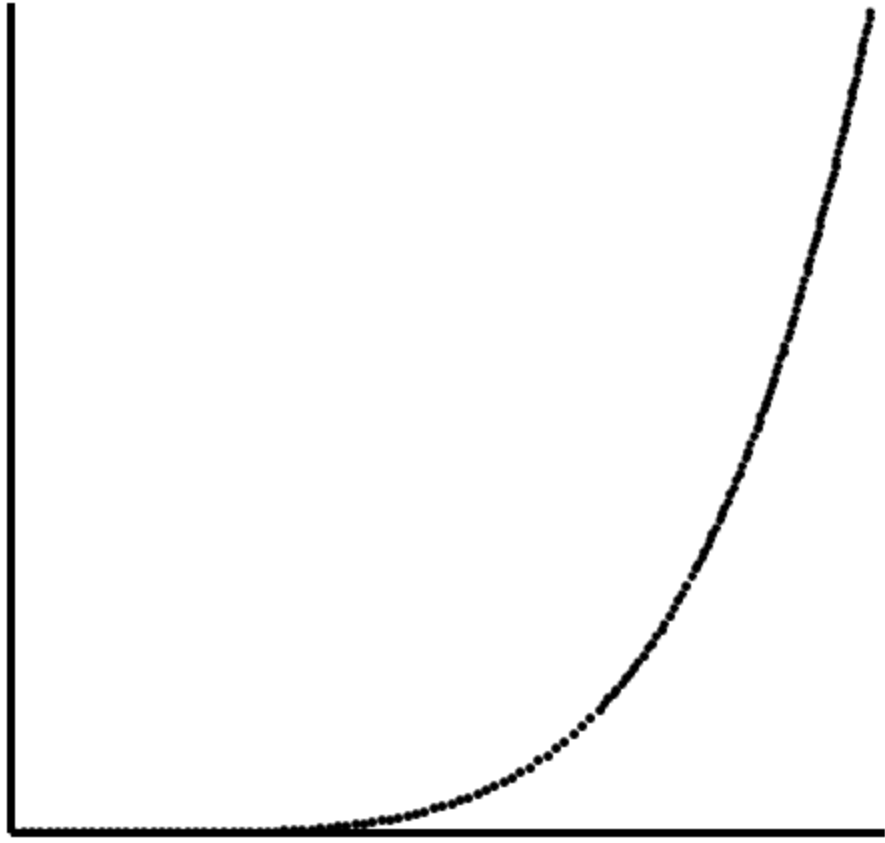
regresja wykładnicza

$$\frac{1}{a + bx}$$



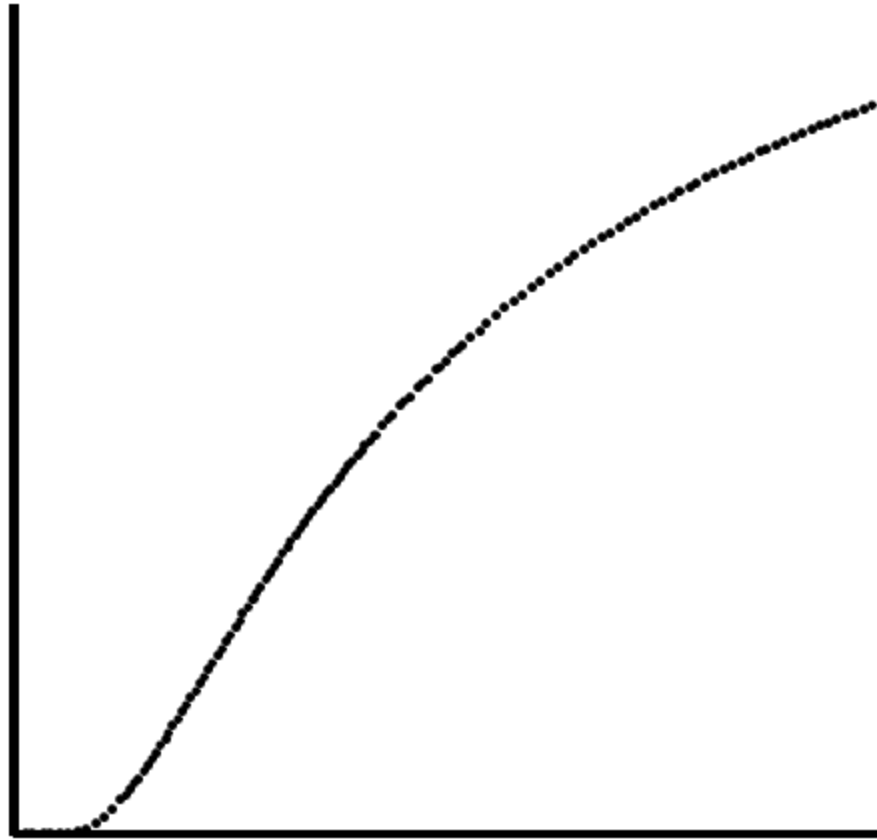
regresja hiperboliczna

$$ax^b$$

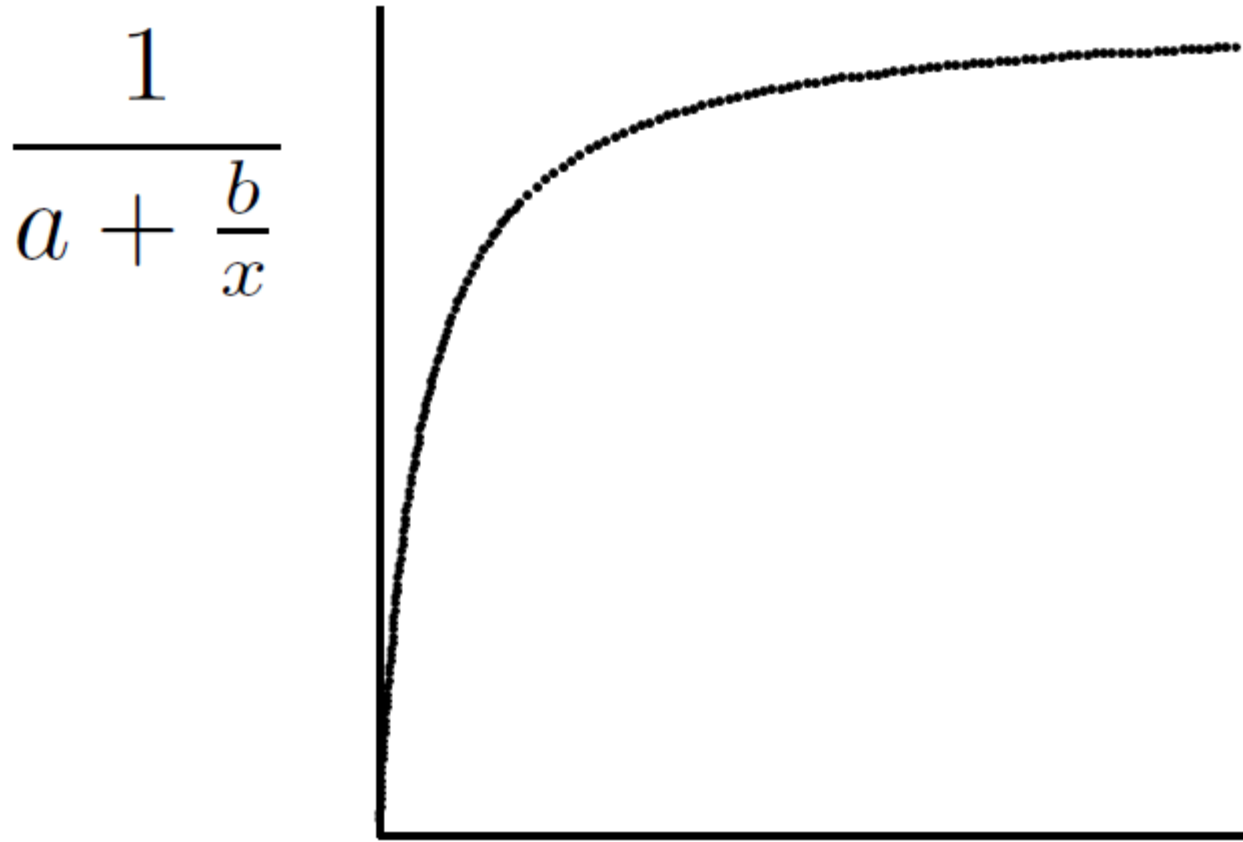


regresja potęgowa

$$e^{a + \frac{b}{x}}$$

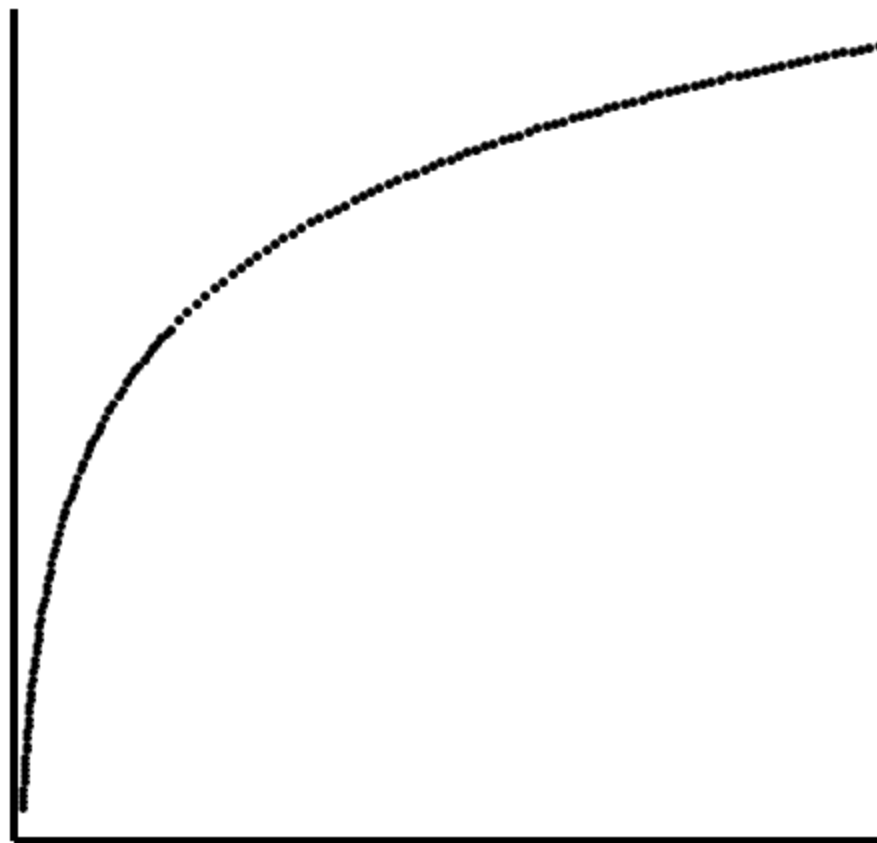


regresja typu S



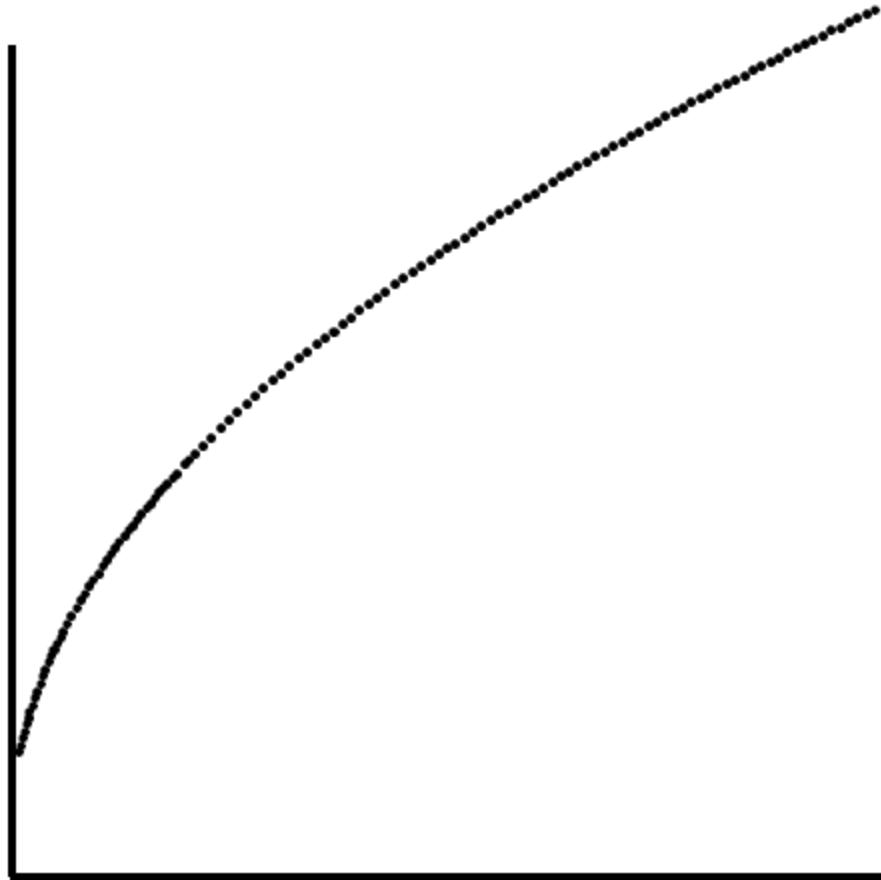
regresja podwójnie
hiperboliczna

$$a + b \ln x$$



regresja logarytmiczna

$$a + b\sqrt{x}$$



regresja pierwiastkowa

Regresja prosta

Funkcja regresji zależna tylko od jednego argumentu

Liniowa	$a + bx$	$y = a + bx$
Potęgowa	ax^b	$\ln y = \ln a + b \ln x$
Wykładnicza	$\exp(a + bx)$	$\ln y = a + bx$
Typu S	$\exp(a + \frac{b}{x})$	$\ln y = a + b \frac{1}{x}$
Hiperboliczna	$\frac{1}{a+bx}$	$\frac{1}{y} = a + bx$
Podwójnie hiperboliczna	$\frac{1}{a+b/x}$	$\frac{1}{y} = a + b \frac{1}{x}$
Pierwiastkowa	$a + b\sqrt{x}$	$y = a + b\sqrt{x}$
Logarytmiczna	$a + b \ln x$	$y = a + b \ln x$

Funkcja regresji $E(Y|X = x) = \beta_0 + \beta_1 x$

Model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

ε_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$.

Estymacja współczynników metodą najmniejszych kwadratów

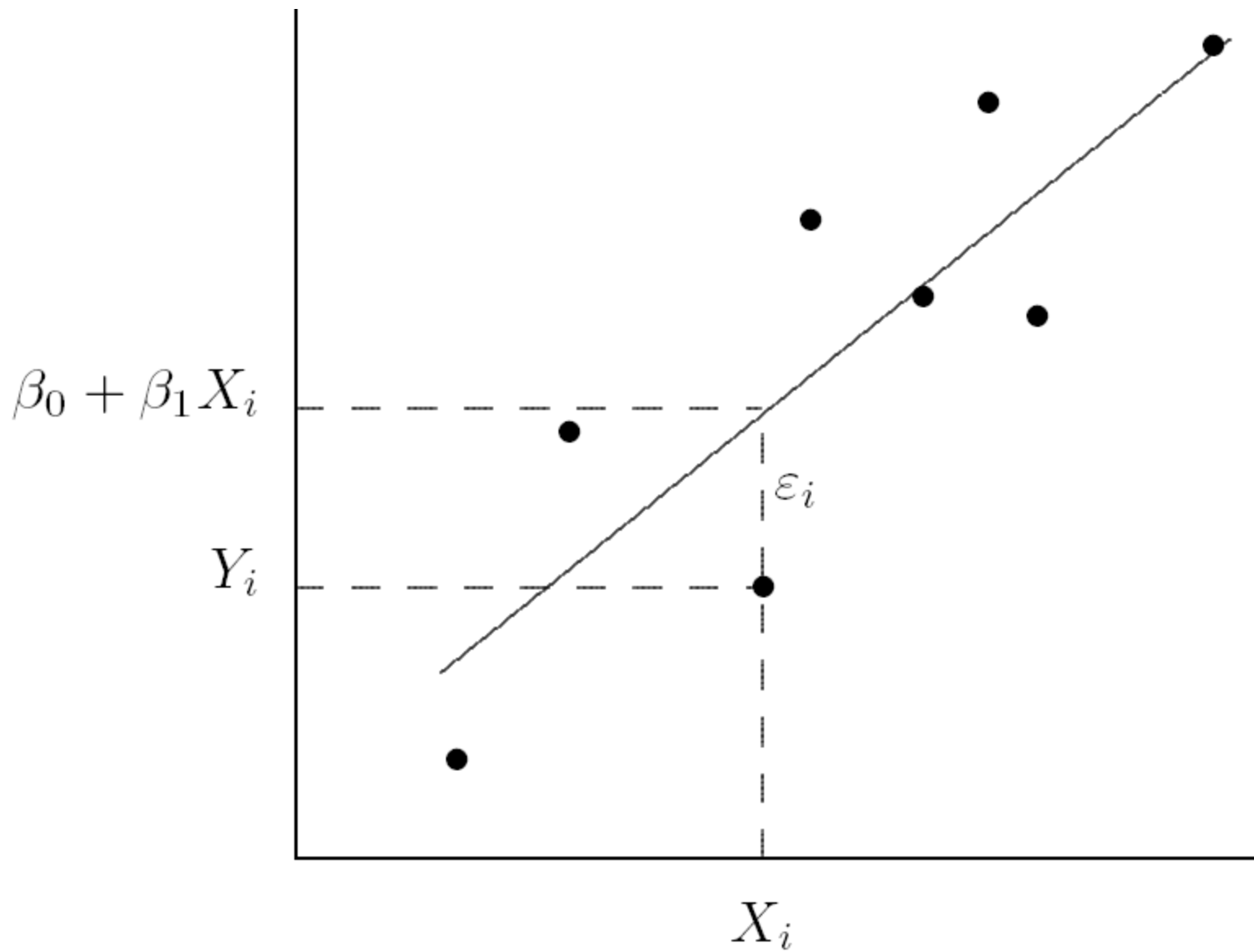
Znaleźć takie β_0 i β_1 by

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2 = \min$$

Szukamy takich parametrów β_0, β_1 aby zminimalizować sumę kwadratów reszt, tzn.

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \min$$

└



Istnienie zależności

Weryfikacja hipotezy $H_0 : \beta_1 = 0$

Źródło zmienności	Suma kwadratów	Stopnie swobody	Średnie kwadraty	F
Regresja	$\text{var}R$	1	$s_R^2 = \text{var}R$	s_R^2 / s^2
Błąd	RSS	$n-2$	$s^2 = \text{RSS} / (n-2)$	
Całkowita	$\text{var}Y$	$n-1$		

n

Obszar ufności dla prostej regresji

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

Średnia wartość cechy Y dla ustalonego $X = x$

$$\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

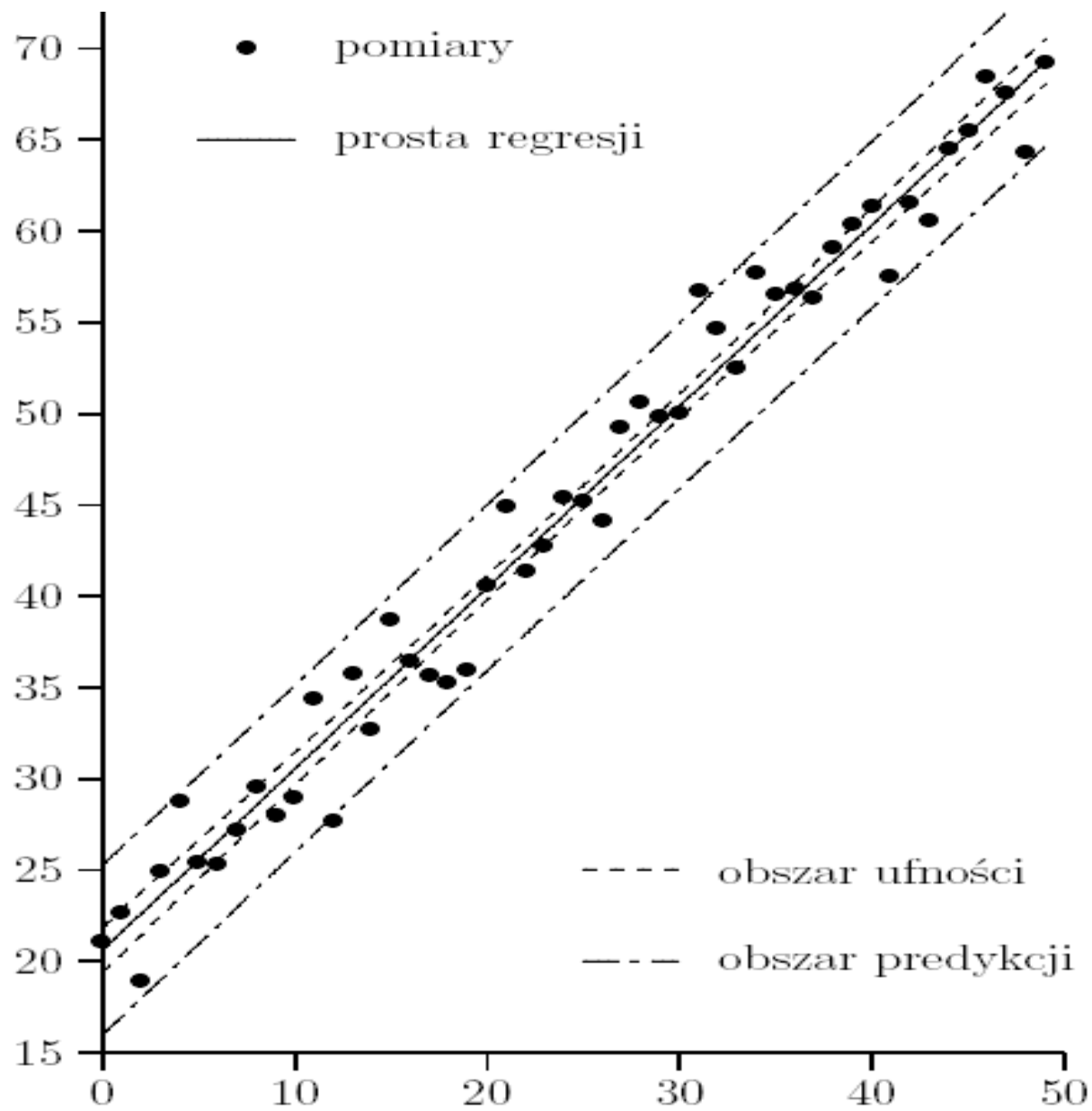
Na podstawie obszaru ufności wnioskujemy o **wartościach średnich** cechy Y jednocześnie dla wielu wybranych wartości cechy X

Predykcja wartości zmiennej $Y(x)$

Wartość cechy Y dla ustalonego $X = x$

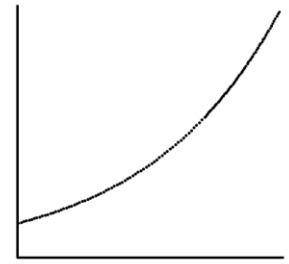
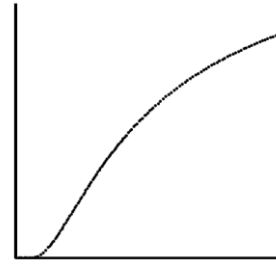
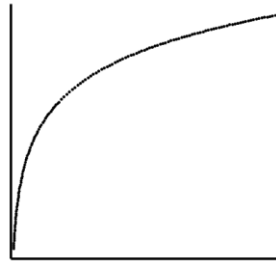
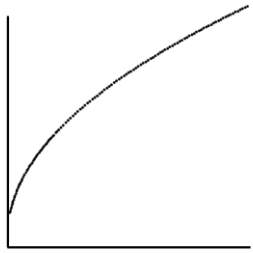
$$\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

Na podstawie obszaru predykcji wnioskujemy o **wartościach** cechy Y jednocześnie dla wielu wybranych wartości cechy X

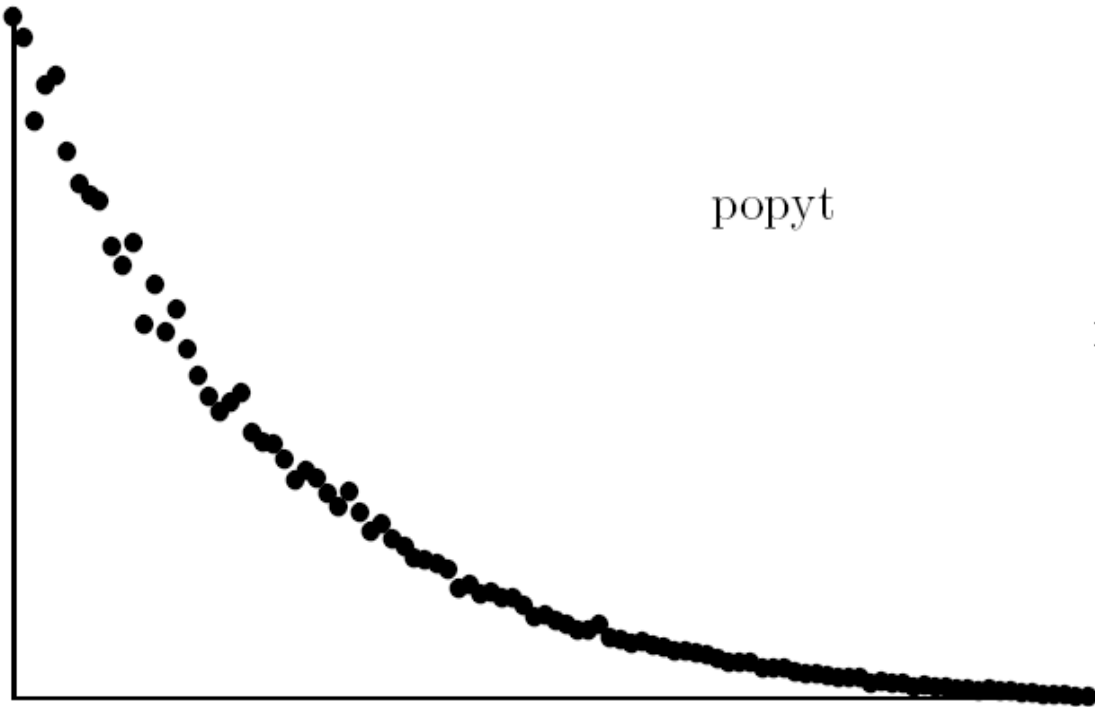


Przykład. Badano zależność między ceną towaru a popytem na ten towar. Na podstawie poniższych danych przeprowadzić analizę regresji.

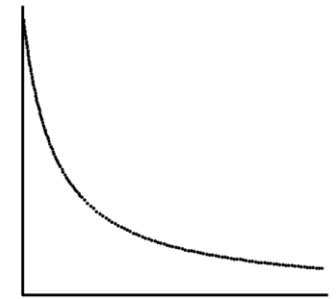
Cena	Popyt	Cena	Popyt	Cena	Popyt	Cena	Popyt	Cena	Popyt
0	688.6660	20	305.2350	40	137.6316	60	59.2920	80	26.6664
1	668.5006	21	313.3761	41	119.8710	61	56.8174	81	24.5516
2	585.2404	22	274.8090	42	122.3169	62	57.1199	82	24.7466
3	620.7191	23	265.8115	43	112.8871	63	53.9587	83	21.1797
4	631.3066	24	263.9127	44	114.8166	64	52.7557	84	21.7877
5	555.6787	25	247.1726	45	110.2780	65	49.6954	85	20.9799
6	523.0394	26	227.9754	46	109.9141	66	44.5124	86	19.7234
7	510.7502	27	237.3264	47	101.6284	67	44.9967	87	18.6367
8	504.5449	28	229.8074	48	89.6586	68	44.3595	88	19.2405
9	459.9711	29	213.1303	49	93.1468	69	39.7275	89	17.4347
10	441.8514	30	201.1405	50	87.3825	70	39.8829	90	18.3870
11	463.2068	31	216.3138	51	82.7416	71	39.3322	91	15.9288
12	381.5119	32	195.3679	52	77.3328	72	35.1059	92	16.8617
13	422.1652	33	176.2760	53	76.7411	73	34.4407	93	14.2136
14	374.1622	34	184.1000	54	82.4336	74	33.2335	94	14.6192
15	397.3657	35	169.1835	55	68.8193	75	31.4761	95	13.7955
16	357.4174	36	160.1516	56	67.3987	76	30.4003	96	12.4930
17	331.1023	37	149.3296	57	64.2539	77	30.0409	97	12.7864
18	309.4546	38	148.2669	58	65.4210	78	30.1891	98	11.3360
19	295.2351	39	143.3767	59	61.5881	79	24.2257	99	11.6303



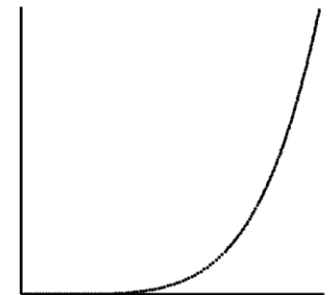
regresja pierwiastkowa regresja logarytmiczna regresja typu S regresja wykładnicza



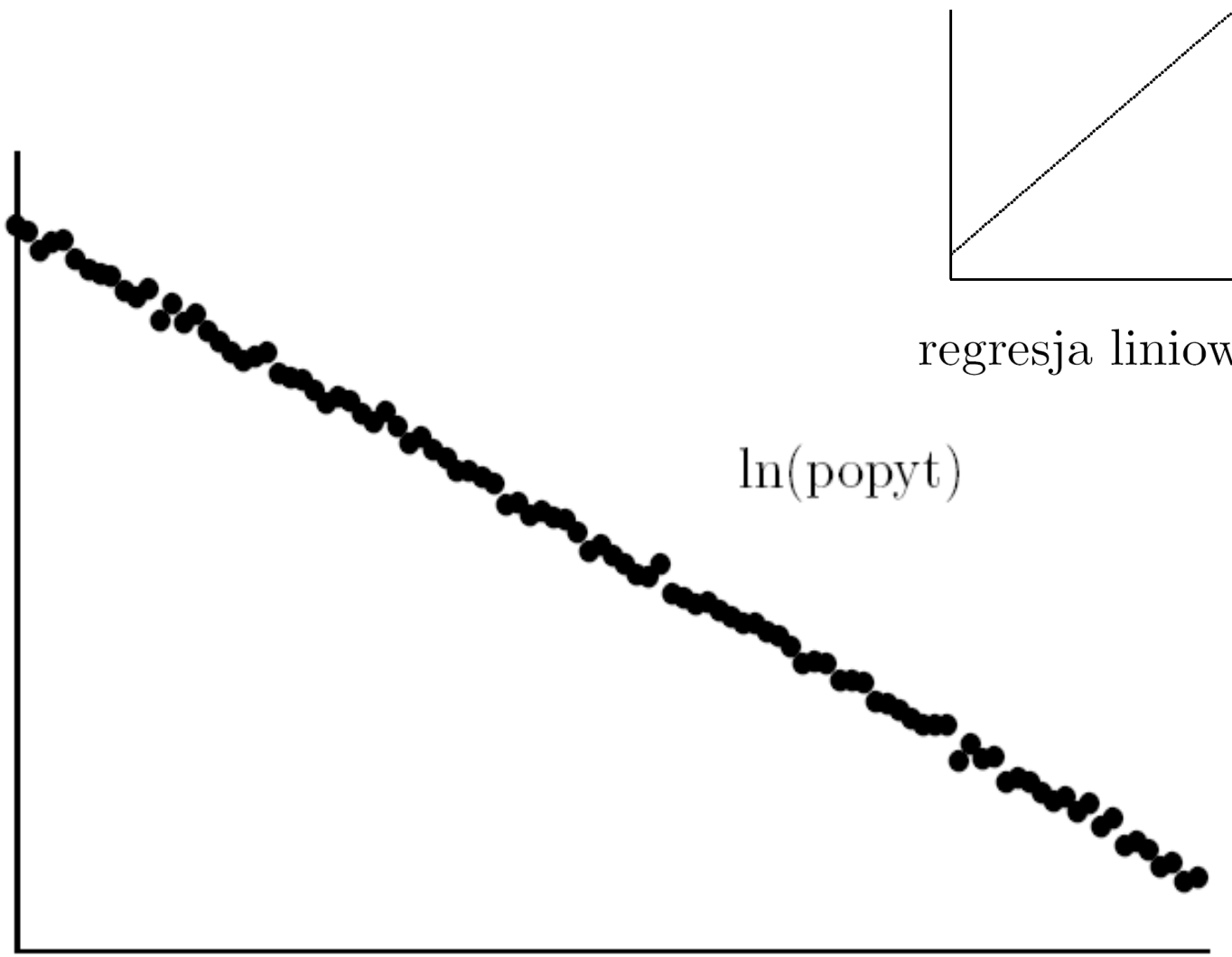
popyt



regresja hiperboliczna



regresja potęgowa



Nazwa funkcji	Wzór funkcji	Model
Liniowa	$a + bx$	$y = a + bx$
Potęgowa	ax^b	$\ln y = \ln a + b \ln x$
Wykładnicza	$\exp(a + bx)$	$\ln y = a + bx$
Typu S	$\exp(a + \frac{b}{x})$	$\ln y = a + b\frac{1}{x}$
Hiperboliczna	$\frac{1}{a+bx}$	$\frac{1}{y} = a + bx$
Podwójnie hiperboliczna	$\frac{1}{a+b/x}$	$\frac{1}{y} = a + b\frac{1}{x}$
Pierwiastkowa	$a + b\sqrt{x}$	$y = a + b\sqrt{x}$
Logarytmiczna	$a + b \ln x$	$y = a + b \ln x$

Funkcja regresji

$$\text{popyt} = \exp(a + b \cdot \text{cena})$$

Model

$$\ln(\text{popyt}) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{cena}$$

$$Y = \ln(\text{popyt}) \quad x = \text{cena}$$

$$\beta_0 = a \quad \beta_1 = b$$

$$\hat{\beta}_0 = 6.541689 \quad \hat{\beta}_1 = -0.04114$$

$$s^2 = 0.001932$$

Źródło zmienności	Suma kwadratów	Stopnie swobody	Średnie kwadraty	<i>F</i>
Regresja	141.0112	1	141.0112	72973.08
Błąd	0.189373	98	0.001932	
Całkowita	141.2006	99		

$$H_0 : \beta_1 = 0 \quad F(0.05; 1, 98) = 3.938$$

Wniosek:

zapropionowana funkcja regresji może opisywać zależność między ceną a popytem na towar

Współczynnik determinacji

$$D = 99.866\%$$

Zastosowanie

Przedział ufności dla oczekiwanego popytu na towar przy cenie $x = 30$

dla Y (5.297033, 5.318088)

dla popytu (199.7434, 203.9935)

Przyk
nego art
(sur_1, s
artykuł
wadzić :

s_1	s_2	$prod$	s_1	s_2	$prod$	s_1	s_2	$prod$	s_1	s_2	$prod$
0.1	0.1	1.936248	0.6	0.3	4.697887	0.1	0.6	3.776876	0.6	0.8	9.024716
0.2	0.1	2.017051	0.7	0.3	6.212012	0.2	0.6	6.488632	0.7	0.8	7.385809
0.3	0.1	2.547019	0.8	0.3	5.711818	0.3	0.6	5.356985	0.8	0.8	7.319159
0.4	0.1	2.991221	0.9	0.3	6.801152	0.4	0.6	6.040919	0.9	0.8	9.403422
0.5	0.1	3.103400	1.0	0.3	5.130012	0.5	0.6	7.274057	1.0	0.8	9.533901
0.6	0.1	3.395465	0.1	0.4	4.711792	0.6	0.6	7.327822	0.1	0.9	7.462994
0.7	0.1	2.366942	0.2	0.4	3.901310	0.7	0.6	7.871890	0.2	0.9	7.943808
0.8	0.1	2.954253	0.3	0.4	5.246389	0.8	0.6	7.862603	0.3	0.9	8.495195
0.9	0.1	3.454655	0.4	0.4	5.762669	0.9	0.6	6.612192	0.4	0.9	7.988018
1.0	0.1	2.836646	0.5	0.4	6.670547	1.0	0.6	6.928189	0.5	0.9	8.260379
0.1	0.2	2.633539	0.6	0.4	5.662259	0.1	0.7	5.658337	0.6	0.9	8.963044
0.2	0.2	2.737200	0.7	0.4	5.588580	0.2	0.7	6.262777	0.7	0.9	8.811154
0.3	0.2	2.922328	0.8	0.4	6.470962	0.3	0.7	5.986275	0.8	0.9	8.164607
0.4	0.2	3.376518	0.9	0.4	5.960982	0.4	0.7	6.799810	0.9	0.9	7.778411
0.5	0.2	3.603429	1.0	0.4	6.822329	0.5	0.7	7.379986	1.0	0.9	10.306121
0.6	0.2	3.267117	0.1	0.5	3.861578	0.6	0.7	7.987376	0.1	1.0	6.596179
0.7	0.2	3.934322	0.2	0.5	4.708645	0.7	0.7	7.899379	0.2	1.0	7.709768
0.8	0.2	4.107574	0.3	0.5	4.773405	0.8	0.7	7.304735	0.3	1.0	8.029625
0.9	0.2	4.438335	0.4	0.5	5.677243	0.9	0.7	9.891345	0.4	1.0	7.512992
1.0	0.2	4.311634	0.5	0.5	6.135761	1.0	0.7	8.784312	0.5	1.0	9.852992
0.1	0.3	3.344719	0.6	0.5	6.402305	0.1	0.8	5.684369	0.6	1.0	8.752144
0.2	0.3	3.825492	0.7	0.5	6.375133	0.2	0.8	7.043533	0.7	1.0	8.561350
0.3	0.3	4.923739	0.8	0.5	8.421879	0.3	0.8	7.663122	0.8	1.0	8.809613
0.4	0.3	4.521357	0.9	0.5	5.816456	0.4	0.8	6.987355	0.9	1.0	9.380318
0.5	0.3	4.680259	1.0	0.5	6.569014	0.5	0.8	7.099786	1.0	1.0	9.556762

Funkcja regresji

(funkcja produkcji Cobba–Douglasa)

$$prod = a \cdot sur_1^{\alpha_1} \cdot sur_2^{\alpha_2}$$

Model

$$\ln(prod) = \ln(a) + \alpha_1 \ln(sur_1) + \alpha_2 \ln(sur_2)$$

$$Y = \ln(prod) \quad x_1 = \ln(sur_1) \quad x_2 = \ln(sur_2)$$

$$\beta_0 = \ln(a) \quad \beta_1 = \alpha_1 \quad \beta_2 = \alpha_2$$

$$Y = 2.307795 + 0.200292x_1 + 0.511396x_2$$

$$prod = 10.052235 \cdot sur_1^{0.200292} \cdot sur_2^{0.511396}$$

Interpretacja współczynnika regresji β_1

jeżeli wartość zmiennej niezależnej x_1 wzrośnie o jednostkę zaś zmienna x_2 pozostanie na tym samym poziomie, to średnia wartość cechy Y zmieni się (wzrośnie lub zmaleje) o około $\hat{\beta}_1$ jednostek.

Inne funkcje

$$f(x) = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i}^2 + \dots + b_p x_{pi}^l$$

$$f(x) = b_0 + \frac{b_1}{x_{1i}} + \frac{b_2}{x_{2i}} + \dots + \frac{b_p}{x_{pi}}$$

$$f(x) = b_0 + b_1 \ln x_{1i} + b_2 \ln x_{2i} + \dots + b_p \ln x_{pi}$$

$$f(x) = \frac{\beta_0}{1 + \beta_1 e^{cx}}$$

$$f(x) = \alpha_1 \frac{x}{x + \alpha_2}$$

Funkcja Törnquista I

$$f(x) = \alpha_1 \frac{x}{x + \alpha_2}$$

$$Y_i = \frac{x_i}{\beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{x_i}{Y_i} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i \quad i = 1, \dots, n$$